

Стохастические системы

© 2025 г. А.А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук (nazarov.tsu@gmail.com),
Е.А. ФЁДОРОВА, канд. физ.-мат. наук (ekat_fedorova@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

МЕТОД МАРГИНАЛЬНОГО АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА МУЛЬТИКЛАССОВОЙ RQ-СИСТЕМЫ $M_n/GI_n/1$ ¹

Исследована система массового обслуживания с повторными вызовами и разными типами заявок, т.е. мультиклассовая RQ-система. На вход системы поступает конечное число входящих простейших потоков (классов заявок). В системе имеется один прибор. Если входящая заявка застаёт прибор свободным, она занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения. Если прибор занят, заявка переходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, распределённую по экспоненциальному закону, после которой она снова обращается к прибору. Для исследования модели предлагается метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа в условии согласованной большой задержки на орбите заявок всех классов, кроме выделенного. В результате найдены асимптотические маргинальные распределения вероятностей числа заявок выделенного класса на орбите.

Ключевые слова: мультиклассовая RQ-система, маргинальный асимптотически-диффузионный анализ, большая задержка.

DOI: 10.31857/S0005231025030041, **EDN:** IEOGSP

1. Введение

RQ-системы (Retrial queueing systems), или системы массового обслуживания с повторными вызовами, являются одними из наиболее распространённых моделей, используемых для анализа и оптимизации информационных систем. Возникновение таких моделей как нового направления теории массового обслуживания (ТМО) связано с развитием телекоммуникаций и информационных технологий. Было показано, что классические модели теории массового обслуживания не подходят для описания систем, где имеют место повторные вызовы. Так, например, при неуспешной попытке дозвониться абонент будет пробовать снова звонить через некоторое случайное время. Аналогично в сетях передачи данных при неуспешной передаче пакета (ошибки, коллизии, недоступность сервера) имеет место некоторая задержка перед

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00454).

повторной передачей. В [1, 2] описано несколько примеров их применения к реальным call-центрам, сетям сотовой связи, компьютерным сетям, центрам распределенных вычислений и т.д.

Наиболее подробное описание RQ-моделей представлено в монографиях [1, 3]. Несмотря на большое количество работ в данной тематике, модели с несколькими типами заявок исследуются крайне редко. Это связано в первую очередь с тем, что сами RQ-системы отличаются большей сложностью аналитического исследования, чем классические модели ТМО (так, аналитические формулы удается получить лишь для самых простых задач). Во-вторых, с возрастанием числа различаемых классов заявок увеличивается размерность решаемой задачи – для исследования RQ-системы с N типами заявок необходимо исследовать $(N + 1)$ -мерный случайный процесс. При использовании матричных методов исследования [4, 5] рост размерности задачи в зависимости от количества классов имеет степенной закон. Те же сложности возникают при численном исследовании и имитационном моделировании [6, 7], хотя некоторые авторы предлагают определенные алгоритмы оптимизации вычислений [8].

В реальных сетях связи разнородность данных совсем не редкость [9, 10]. Различные типы передаваемой информации или типы запросов в вычислительных системах требуют различные стратегии и характеристики обслуживания. Таким образом, исследование гетерогенных (или мультиклассовых) моделей ТМО является актуальной научной проблемой.

Мультиклассовые RQ-системы исследуются группами ученых под руководством Е.В. Морозова [11–13] и А. Krishnamoorthy [14]. Также отдельные исследования для RQ с несколькими потоками отражены в работах В. Kim [15, 16], Y. Shin [17], С.Н. Степанова [8, 18] и др. Большинство работ в данной области [11–13, 15, 16] посвящено анализу стабильности функционирования таких моделей (как классических RQ, так и RQ с динамическим протоколом доступа или RQ с постоянной суммарной интенсивностью повторных обращений «RQ with constant retrial rate»). Однако в перечисленных работах не находятся выражения для распределений вероятностей числа заявок в системе, обычно только средние характеристики. Безусловно, получение средних и анализ стабильности имеет важное значение для анализа сетей связи, но дисперсия и тем более вид распределений дает более полную картину. Это особенно актуально для информационных систем, где важно не допустить перегрузки системы или потери важных пакетов информации.

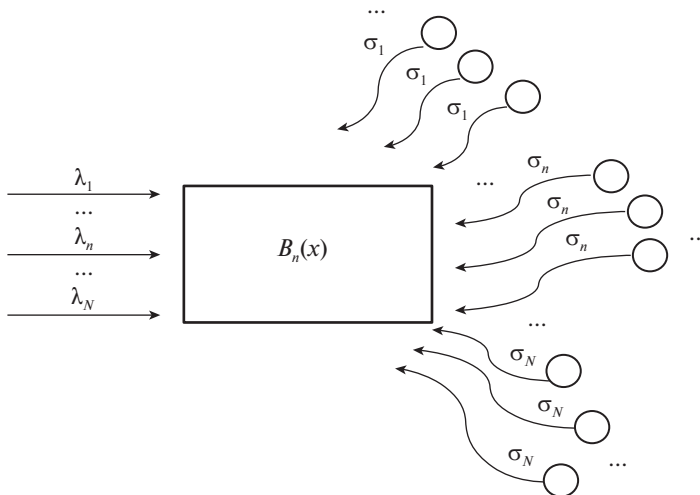
В данной статье предлагается оригинальный метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа для исследования мультиклассовых RQ-систем, являющегося развитием метода, изложенного в [19, 20] на случай исследования многомерных случайных процессов. Работа является расширением исследований [21] на случай произвольного закона времени обслуживания.

2. Математическая модель

Рассмотрим мультиклассовую RQ-систему типа $M_n/GI_n/1$, на вход которой поступает N независимых простейших потоков заявок (N классов) с интенсивностями λ_n , где $n = \overline{1, N}$. В системе имеется один обслуживающий прибор. Если входящая заявка (любого типа) застаёт прибор свободным, она занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B_n(x)$. Предполагается, что заданное распределение имеет конечные моменты первого и второго порядка. Если прибор занят, заявка уходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Время задержки заявки n -го потока на орбите распределено по экспоненциальному закону с параметром σ_n . По истечении случайного времени заявка осуществляет повторную попытку обратиться к прибору. Если прибор свободен, она встает на обслуживание, если занят – мгновенно возвращается на орбиту. Все заявки на орбите действуют независимо друг от друга, т.е. реализуется протокол множественного случайного доступа. Интервалы наступления событий входящих потоков, времени обслуживания и задержки заявок каждого класса на орбите также независимы. Рассматриваемая модель схематически изображена на рисунке.

Заметим, что для математического исследования не имеет значения, является ли орбита общей для всех заявок (но с разными параметрами задержки для каждого класса заявок) или имеется отдельная орбита для каждого класса, важно знать количество заявок того или иного класса в системе в текущий момент времени.

Пусть $i_n(t)$ – количество заявок n -го типа на орбите, где $n = \overline{1, N}$; случайный процесс $k(t)$ характеризует состояние прибора следующим образом: $k(t) = 0$, если прибор свободен, $k(t) = n$, если на приборе обслуживается за-



Мультиклассовая RQ-система $M_n/GI_n/1$.

явка n -го класса; $z(t)$ – остаточное время обслуживания текущей заявки, занимающей прибор.

Обозначим: $P\{k(t) = 0, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_N(t) = i_N\} = P(0, \mathbf{i}, t)$ и $P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_N(t) = i_N, z(t) < z\} = P(k, \mathbf{i}, z, t)$ – вероятность того, что прибор находится в состоянии k и имеется $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_N\}$ заявок на орбитах в момент времени t , а оставшееся время обслуживания текущей заявки меньше z .

Многомерный процесс $\{k(t), \mathbf{i}(t), z(t)\}$ является марковским, составим уравнения Колмогорова для вероятностей $P(0, \mathbf{i}, t)$ и $P(k, \mathbf{i}, t)$:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P(0, \mathbf{i}, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial P(n, \mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} - \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N i_n \sigma_n \right) P(0, \mathbf{i}, t), \\ \frac{\partial P(k, \mathbf{i}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(k, \mathbf{i}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(k, \mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} - \\ - \sum_{n=1}^N \lambda_n P(k, \mathbf{i}, z, t) + \lambda_k P(0, \mathbf{i}, t) B_k(z) + \\ + (i_k + 1) \sigma_k P(0, \mathbf{i} + \mathbf{e}_k, t) B_k(z) + \sum_{n=1}^N \lambda_n P(k, \mathbf{i} - \mathbf{e}_n, z, t), \end{array} \right.$$

где \mathbf{e}_k – вектор размера $1 \times N$ с единичным k -м элементом и остальными нулевыми и $\frac{\partial P(k, \mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial P(k, \mathbf{i}, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$, $k = \overline{1, N}$.

Перейдем к частичным характеристическим функциям:

$$\begin{aligned} H(0, \mathbf{u}, t) &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_N=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} \dots e^{ju_N i_N} P(0, \mathbf{i}, t), \\ H(k, \mathbf{u}, z, t) &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_N=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} \dots e^{ju_N i_N} P(k, \mathbf{i}, z, t). \end{aligned}$$

Тогда система (1) переписывается в следующем виде:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H(0, \mathbf{u}, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial H(n, \mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} - H(0, \mathbf{u}, t) \sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N j \sigma_n \frac{\partial H(0, \mathbf{u}, t)}{\partial u_n}, \\ \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} + \\ + \sum_{n=1}^N \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H(k, \mathbf{u}, z, t) + \lambda_k H(0, \mathbf{u}, t) B_k(z) - \\ - j \sigma_k e^{-ju_k} \frac{\partial H(0, \mathbf{u}, t)}{\partial u_k} B_k(z), \quad k = \overline{1, N}. \end{array} \right.$$

Прямое решение системы (2) довольно затруднительно, поэтому предлагается оригинальный метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа для ее исследования. Данный метод был разработан авторами и апробирован для более простой модели в [21], где была показана достаточно высокая точность метода при сравнении одномерных характеристик системы с имитационным моделированием, а в данной работе предлагается расширение исследований на случай произвольного закона обслуживания.

3. Маргинальный асимптотически-диффузионный анализ

Метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа является развитием метода асимптотически-диффузионного анализа [19] на случай исследования многомерных случайных процессов. В качестве асимптотического условия в данном исследовании было выбрано условие большой задержки заявок на орбите.

Данный метод состоит из нескольких этапов, которые выделим в отдельные параграфы:

1) вывод «маргинальных» асимптотических уравнений для одномерного случайного процесса $i_n(t)$ (т.е. количества заявок «выделенного» класса);

2) нахождение асимптотических характеристик системы: среднего числа заявок каждого класса на орбите и стационарного распределения состояний прибора;

3) применение метода асимптотически-диффузионного анализа для процесса $i_n(t)$.

Заметим, что применение маргинального асимптотического метода, т.е. нахождение маргинальных характеристик модели по каждому классу, не означает, что процессы $i_n(t)$ независимы. Этот метод является, скорее, вынужденной мерой, в силу невозможности исследования многомерного случайного процесса известными аналитическими методами, однако он позволяет найти все характеристики одномерных процессов.

3.1. Маргинальные асимптотические уравнения

Первый этап предлагаемого метода состоит в выводе асимптотических уравнений для маргинального распределения вероятностей количества заявок выделенного класса. Рассмотрим n -й класс заявок, т.е. выделим случайный процесс $i_n(t)$.

Любой асимптотический метод включает в себя введение некоторого малого параметра. В данном случае будем предполагать, что параметры задержки равны $\sigma_\nu = \gamma_\nu \sigma$, для $\nu = \overline{1, N}$, $\nu \neq n$, где $\sigma \rightarrow 0$. Таким образом, имеет место асимптотическое условие большой задержки или условие согласованно растущего времени задержки на орбите заявок всех классов.

Обозначив $\sigma = \varepsilon$, подставим в систему (2) следующие замены:

$$u_\nu = \varepsilon w_\nu \text{ для } \nu = \overline{1, N}, \nu \neq n; \quad u_n = u;$$

$$\mathbf{w}^{(n)} = \{w_1, \dots, w_{n-1}, u, w_{n+1}, \dots, w_N\};$$

$$H(0, \mathbf{u}, t) = F\left(0, \mathbf{w}^{(n)}, t\right), \quad H(k, \mathbf{u}, z, t) = F\left(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t\right).$$

Используя введенные обозначения, из системы (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим следующие уравнения:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial t} = -F\left(0, \mathbf{w}^{(n)}, t\right) \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^N j\gamma_\nu \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial w_\nu} + \\ + j\sigma_n \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial u_n} + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial F(\nu, \mathbf{w}^{(n)}, 0, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t)}{\partial t} = (\lambda_n (e^{ju_n} - 1)) F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t) + \\ + \frac{\partial F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial F(k, \mathbf{w}^{(n)}, 0, t)}{\partial z} + \lambda_k F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t) B_k(z) - \\ - j\gamma_k \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial w_k} B_k(z), \quad k \neq n, \\ \frac{\partial F(n, \mathbf{w}^{(n)}, z, t)}{\partial t} = (\lambda_n (e^{ju_n} - 1)) F(n, \mathbf{w}^{(n)}, z, t) + \\ + \frac{\partial F(n, \mathbf{w}^{(n)}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial F(n, \mathbf{w}^{(n)}, 0, t)}{\partial z} + \\ + \lambda_n F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t) B_n(z) - j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial u_n} B_n(z). \end{array} \right.$$

Из вида уравнений (3) можно сделать вывод, что решение этой системы имеет следующий вид:

$$(4) \quad F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t) = H_n(0, u_n, t) \times \exp \left\{ \sum_{\nu \neq n} jw_\nu x_\nu \right\},$$

$$F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t) = H_n(k, u_n, z, t) \times \exp \left\{ \sum_{\nu \neq n} jw_\nu x_\nu \right\},$$

где x_n – неизвестные величины, а функции $H_n(0, u_n, t)$ и $H_n(k, u_n, z, t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_n(0, u_n, t)}{\partial t} = -H_n(0, u_n, t) \left(\sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^N \gamma_\nu x_\nu \right) + \\ + j\sigma_n \frac{\partial H_n(0, u_n, t)}{\partial u_n} + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial H_n(\nu, u_n, 0, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_n(k, u_n, z, t)}{\partial t} = \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H_n(k, u_n, z, t) + \frac{\partial H_n(k, u_n, z, t)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial H_n(k, u_n, 0, t)}{\partial z} + H_n(0, u_n, t) (\lambda_k + \gamma_k x_k) B_k(z), \quad k \neq n, \\ \frac{\partial H_n(n, u_n, z, t)}{\partial t} = \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H_n(n, u_n, z, t) + \frac{\partial H_n(n, u_n, z, t)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial H_n(\nu, u_n, 0, t)}{\partial z} + \lambda_n H_n(0, u_n, t) B_n(z) - \\ - j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial H_n(0, u_n, t)}{\partial u_n} B_n(z). \end{array} \right.$$

Неизвестные функции $H_n(k, u_n, z, t)$ имеют смысл асимптотических частичных характеристических функций числа заявок выделенного класса на орбите. Таким образом, решая систему (5), можно получить маргинальные распределения для каждого класса заявок. Однако в данных уравнениях фигурируют неизвестные величины x_k , имеющие смысл асимптотических средних. В следующем параграфе получим выражения для их определения.

3.2. Асимптотические средние

Чтобы найти параметры x_k , $k = \overline{1, N}$, необходимо вернуться к системе (2), записав ее в стационарном режиме:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N \frac{\partial H(n, \mathbf{u}, 0)}{\partial z} - H(0, \mathbf{u}) \sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N j\sigma_n \frac{\partial H(0, \mathbf{u})}{\partial u_n} = 0, \\ \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, z)}{\partial z} - \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, 0)}{\partial z} + \sum_{n=1}^N \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H(k, \mathbf{u}, z) + \\ + \lambda_k H(0, \mathbf{u}) B_k(z) - j\sigma_k e^{-ju_k} \frac{\partial H(0, \mathbf{u})}{\partial u_k} B_k(z) = 0, \quad k = \overline{1, N}. \end{array} \right.$$

Суммируем уравнения по всем $k = \overline{0, N}$ и запишем результат при $z \rightarrow \infty$, получим так называемое согласованное уравнение:

$$(7) \quad \sum_{n=1}^N (e^{ju_n} - 1) \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N H(k, \mathbf{u}) + j\sigma_k e^{-ju_k} \frac{\partial H(0, \mathbf{u})}{\partial u_k} \right) = 0.$$

Подставим в уравнения (6) и (7) следующие асимптотические замены:

$$\sigma_n = \gamma_n \sigma, \quad \sigma = \varepsilon, \quad u_n = \varepsilon w_n, \quad H(0, \mathbf{u}) = F(0, \mathbf{w}, \varepsilon), \quad H(k, \mathbf{u}, z) = F(k, \mathbf{w}, z, \varepsilon).$$

Получим следующую систему:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N \frac{\partial F(n, \mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} - F(0, \mathbf{w}, \varepsilon) \sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N j \gamma_n \frac{\partial F(0, \mathbf{w}, \varepsilon)}{\partial w_n} = O(\varepsilon), \\ \frac{\partial F(k, \mathbf{w}, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F(k, \mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \sum_{n=1}^N \lambda_n (e^{j\varepsilon w_n} - 1) F(k, \mathbf{w}, z, \varepsilon) + \\ + \lambda_k F(0, \mathbf{w}, \varepsilon) B_k(z) - j \gamma_k e^{-j\varepsilon w_k} \frac{\partial F(0, \mathbf{w}, \varepsilon)}{\partial w_k} B_k(z) = O(\varepsilon), \quad k = \overline{1, N}, \\ \sum_{n=1}^N (e^{j\varepsilon w_n} - 1) \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N F(k, \mathbf{w}, z, \varepsilon) + j \gamma_k e^{-j\varepsilon w_k} \frac{\partial F(0, \mathbf{w}, \varepsilon)}{\partial w_k} \right) = O(\varepsilon). \end{array} \right.$$

После некоторых преобразований при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N \frac{\partial F(n, \mathbf{w}, 0)}{\partial z} - F(0, \mathbf{w}) \sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N j \gamma_n \frac{\partial F(0, \mathbf{w})}{\partial w_n} = 0, \\ \frac{\partial F(k, \mathbf{w}, z)}{\partial z} - \frac{\partial F(k, \mathbf{w}, 0)}{\partial z} + \\ + \lambda_k F(0, \mathbf{w}) B_k(z) - j \gamma_k \frac{\partial F(0, \mathbf{w})}{\partial w_k} B_k(z) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \\ \sum_{n=1}^N j w_n \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N F(k, \mathbf{w}, z) + j \gamma_k \frac{\partial F(0, \mathbf{w})}{\partial w_k} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Решение этой системы имеет вид

$$F(0, \mathbf{w}) = r_0 \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^N j w_n x_n \right\}, \quad F(k, \mathbf{w}, z) = r_k(z) \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^N j w_n x_n \right\}.$$

Тогда из системы (9) получаем следующие уравнения:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N r'_n(0) - r_0 \sum_{n=1}^N (\lambda_n + \gamma_n x_n) = 0, \\ r'_k(z) - r'_k(0) + r_0 B_k(z) (\lambda_k + \gamma_k x_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \\ \lambda_n \sum_{k=1}^N r_k(z) - \gamma_n x_n r_0 = 0, \quad n = \overline{1, N}, \end{array} \right.$$

$$\text{где } r'_n(0) = \left. \frac{dr_n(z)}{dz} \right|_{z=0}.$$

Обозначим: $\kappa_n = \lambda_n + \gamma_n x_n$. Из системы (10) нетрудно получить:

$$(11) \quad r_k(z) = r_0 \kappa_k \int_0^z (1 - B_k(x)) dx \quad \text{или} \quad r_k = \lambda_k b_k^{(1)},$$

где $\kappa_k = \lambda_k/r_0$, $k = \overline{1, N}$, $b_k^{(1)} = \int_0^\infty (1 - B_k(x)) dx$, а выражение для r_0 можно получить из условия нормировки:

$$(12) \quad r_0 = 1 - \sum_{k=1}^N r_k \quad \text{или} \quad r_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^N \kappa_k b_k^{(1)} \right)^{-1}.$$

Таким образом, асимптотические средние значения числа заявок на орбите вычисляются как $x_k = (\kappa_k - \lambda_k)/\gamma_k$, где $\kappa_k = \lambda_k/r_0$.

3.3. Асимптотически-диффузионный анализ

Вернемся к уравнениям для выделенного класса заявок (5). Запишем согласованное уравнение путем суммирования всех уравнений при $z \rightarrow \infty$.

$$(13) \quad \frac{\partial H_n(u_n, t)}{\partial t} = (e^{ju_n} - 1) \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N H_u(k, u_n, t) + j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial H_n(0, u_n, t)}{\partial u_n} \right).$$

3.3.1. Первая асимптотика

Обозначим:

$$\sigma_n = \varepsilon, \quad \sigma_n t = \varepsilon t = \tau, \quad u_n = \varepsilon w,$$

$$H_n(0, u_n, t) = F_n(0, w, \tau, \varepsilon), \quad H_n(k, u_n, z, t) = F_n(k, w, \tau, z, \varepsilon).$$

Подставляем в (5):

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial F_n(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = -F_n(0, w, \tau, \varepsilon) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v \right) + \\ + j \frac{\partial F_n(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{v=1}^N \frac{\partial F_n(v, w, \tau, 0, \varepsilon)}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{\partial F_n(k, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial \tau} = \lambda_n (e^{j\varepsilon w} - 1) F_n(k, w, \tau, \varepsilon) + \frac{\partial F_n(k, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial F_n(k, w, \tau, 0, \varepsilon)}{\partial z} + F_n(0, w, \tau, \varepsilon) \kappa_k B_k(z), \quad k \neq n, \\ \varepsilon \frac{\partial F_n(n, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial \tau} = \lambda_n (e^{j\varepsilon w} - 1) F_n(n, w, \tau, z, \varepsilon) + \\ + \frac{\partial F_n(n, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_n(n, w, \tau, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \lambda_n F_n(0, w, \tau, \varepsilon) B_n(z) - \\ - j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_n(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} B_n(z). \end{array} \right.$$

Из (13) имеем:

$$(15) \quad \varepsilon \sum_{k=0}^N \frac{\partial F_n(k, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \\ = (e^{j\varepsilon w} - 1) \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N F_n(k, w, \tau, \varepsilon) + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_n(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \right).$$

Выполним предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ в (14):

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} -F_n(0, w, \tau) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v \right) + j \frac{\partial F_n(0, w, \tau)}{\partial w} + \\ + \sum_{v=1}^N \frac{\partial F_n(v, w, 0, \tau)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial F_n(k, w, z, \tau)}{\partial z} - \frac{\partial F_n(k, w, 0, \tau)}{\partial z} + F_n(0, w, \tau) \kappa_k B_k(z) = 0, \quad k \neq n, \\ \frac{\partial F_n(n, w, z, \tau)}{\partial z} - \frac{\partial F_n(n, w, 0, \tau)}{\partial z} + \lambda_n F_n(0, w, \tau) B_n(z) - \\ - j \frac{\partial F_n(0, w, \tau)}{\partial w} B_n(z) = 0. \end{array} \right.$$

Из вида уравнений (16), можно сделать вывод, что функции $F_n(0, w, \tau)$ и $F_n(k, w, z, \tau)$ будут иметь вид

$$(17) \quad F_n(0, w, \tau) = R_0(x) e^{jw \times x(\tau)}, \quad F_n(k, w, z, \tau) = R_k(x, z) e^{jw \times x(\tau)},$$

где у обозначений $R_0(x)$ и $R_k(x, z)$ опущен индекс n (номер выделенного класса заявок), однако следует помнить, что значения этих функций будут отличаться для каждого класса. Далее также для упрощения записи будем писать x вместо $x(\tau)$.

Подставляя (17) в (16), получим следующую систему:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{v=1}^N \frac{\partial R_v(x, 0)}{\partial z} = R_0(x) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v + x \right), \\ \frac{\partial R_k(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial R_k(x, 0)}{\partial z} - R_0(x) \kappa_k B_k(z) = 0, \quad k \neq n, \\ \frac{\partial R_n(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial R_n(x, 0)}{\partial z} - R_0(x) B_n(z) (\lambda_n + x). \end{array} \right.$$

Откуда нетрудно получить

$$(19) \quad R_k(x, z) = R_0(x) \kappa_k \int_0^z (1 - B_k(x)) dx, \quad k \neq n,$$

$$R_n(x, z) = R_0(x) (\lambda_n + x) \int_0^z (1 - B_n(x)) dx.$$

При $z \rightarrow \infty$:

$$(20) \quad R_k(x) = R_0(x) \kappa_k b_k^{(1)}, \quad k \neq n, \quad R_n(x) = R_0(x) (\lambda_n + x) b_n^{(1)},$$

где $R_0(x)$ определяется из условия нормировки:

$$(21) \quad R_0(x) = \left(1 + (\lambda_n + x) b_n^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_k b_k^{(1)} \right)^{-1}.$$

Вернемся к уравнению (15). Выполним ряд преобразований, после чего при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial F_n(k, w, \tau)}{\partial \tau} = jw \left(j \frac{\partial F_n(0, w, \tau)}{\partial w} + \lambda_n \sum_{k=1}^N F_n(k, w, \tau) \right).$$

Подставляя (17), окончательно получим, что величина $x(\tau)$, имеющая смысл асимптотического среднего числа заявок n -го класса на орбите, определяется уравнением

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = a(x(\tau)),$$

где

$$(22) \quad a(x) = \lambda_n (1 - R_0(x)) - R_0(x)x$$

имеет смысл коэффициента сноса исследуемого случайного процесса.

3.3.2. Вторая асимптотика

В системе (5) выполним подстановки:

$$H_n(0, u_n, t) = H_n^{(2)}(0, u_n, t) \exp \left\{ \frac{j u_n}{\sigma_n} x(\sigma_n t) \right\},$$

$$H_n(k, u_n, z, t) = H_n^{(2)}(k, u_n, z, t) \exp \left\{ \frac{j u_n}{\sigma_n} x(\sigma_n t) \right\}.$$

Далее для упрощения выражений будем писать x вместо $x(\sigma_n t)$.

Получим следующую систему уравнений:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_n^{(2)}(0, u_n, t)}{\partial t} + ju_n a(x) H_n^{(2)}(0, u_n, t) = \\ = -H_n^{(2)}(0, u_n, t) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v \right) + j\sigma_n \frac{\partial H_n^{(2)}(0, u_n, t)}{\partial u_n} - \\ - x H_n^{(2)}(0, u_n, t) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_n^{(2)}(k, u_n, 0, t)}{\partial z}, \\ \\ \frac{\partial H_n^{(2)}(k, u_n, z, t)}{\partial t} + ju_n a(x) H_n^{(2)}(k, u_n, z, t) = \\ = \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H_n^{(2)}(k, u_n, z, t) + \frac{\partial H_n^{(2)}(k, u_n, z, t)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial H_n^{(2)}(k, u_n, 0, t)}{\partial z} + H_n^{(2)}(0, u_n, t) B_k(z) \kappa_k, \quad k \neq n, \\ \\ \frac{\partial H_n^{(2)}(n, u_n, z, t)}{\partial t} + ju_n a(x) H_n^{(2)}(n, u_n, z, t) = \\ = \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H_n^{(2)}(n, u_n, z, t) + \frac{\partial H_n^{(2)}(n, u_n, z, t)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial H_n^{(2)}(n, u_n, 0, t)}{\partial z} + \lambda_n H_n^{(2)}(0, u_n, t) B_n(z) \\ - j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial H_n^{(2)}(0, u_n, t)}{\partial u_n} B_n(z) + e^{-ju_n} H_n^{(2)}(0, u_n, t) x B_n(z). \end{array} \right.$$

Из согласованного уравнения (6) имеем:

$$(24) \quad \frac{\partial H_n^{(2)}(u_n, t)}{\partial t} + ju_n a(x) H_n^{(2)}(u_n, t) = (e^{ju_n} - 1) \times \\ \times \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N H_n^{(2)}(k, u_n, t) + \right. \\ \left. + j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial H_n^{(2)}(0, u_n, t)}{\partial u_n} - e^{-ju_n} H_n^{(2)}(0, u_n, t) x \right).$$

Обозначим:

$$\sigma_n = \varepsilon^2, \quad \sigma_n t = \varepsilon^2 t = \tau, \quad u_n = \varepsilon w,$$

$$H_n^{(2)}(0, u_n, t) = F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon), \quad H_n^{(2)}(k, u_n, z, t) = F_n^{(2)}(k, w, z, \tau, \varepsilon).$$

Из уравнения (23) после некоторых преобразований получим следующие асимптотические уравнения:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) = \\ = -F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v \right) + j\varepsilon \frac{\partial F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - \\ - x F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_n^{(2)}(k, w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(k, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(k, w, \tau, z, \varepsilon) = \\ = \lambda_n \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) F_n^{(2)}(n, w, z, \tau, \varepsilon) + F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) B_k(z) \kappa_k + \\ + \frac{\partial F_n^{(2)}(k, w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_n^{(2)}(k, w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2), \quad k \neq n, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(n, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(n, w, \tau, z, \varepsilon) = \\ = \lambda_n \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) F_n^{(2)}(n, w, z, \tau, \varepsilon) + \lambda_n F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) B_n(z) + \\ + \frac{\partial F_n^{(2)}(n, w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_n^{(2)}(n, w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \\ - j\varepsilon(1 - j\varepsilon w) \frac{\partial F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} B_n(z) + \\ + \left(1 - j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) x B_n(z) + O(\varepsilon^2). \end{array} \right.$$

Из уравнения (24) имеем

$$(26) \quad \begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) \times \\ & \times \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N F_n^{(2)}(k, w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon(1 - j\varepsilon w) \frac{\partial F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - \right. \\ & \quad \left. - x \left(1 - j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (25)–(26) в виде

$$(27) \quad \begin{aligned} F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) &= \Phi(w, \tau)(R_0(x) + jw\varepsilon f_0(x)) + O(\varepsilon^2), \\ F_n^{(2)}(k, w, z, \tau, \varepsilon) &= \Phi(w, \tau)(R_k(x, z) + jw\varepsilon f_k(x, z)) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Подставляя в (25)–(26) и учитывая (16) и (18), после некоторых преобразований при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем следующую систему уравнений:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & -f_0(x) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v + x \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_k(x, 0)}{\partial z} = \\ & = a(x)R_0(x) - R_0(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)}, \\ & \frac{\partial f_k(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial f_k(x, 0)}{\partial z} + f_0(x)\kappa_k B_k(z) = R_k(x, z)(a(x) - \lambda_n), \quad k \neq n, \\ & f_0(x)(\lambda_n + x) + \frac{\partial f_n(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial f_n(x, 0)}{\partial z} = \\ & = R_n(x, z)(a(x) - \lambda_n) + xR_0(x)B_n(z) + R_0(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)} B_n(z). \end{aligned} \right.$$

Сравнивая полученную систему с (18) и используя принцип суперпозиции, нетрудно заметить, что решение (28) можно записать в виде

$$(29) \quad \begin{aligned} f_0(x) &= CR_0(x) + g_0(x) - \phi_0(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)}, \\ f_k(x, z) &= CR_k(x, z) + g_k(x, z) - \phi_k(x, z) \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)}, \end{aligned}$$

где C – нормирующая константа, а неизвестные функции $g_k(x, z)$ и $\phi_k(x, z)$ определяются следующими системами уравнений:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\phi_0(x) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v + x \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi_k(x, 0)}{\partial z} = R_0(x), \\ & \frac{\partial \phi_k(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \phi_k(x, 0)}{\partial z} + \phi_0(x)\kappa_k B_k(z) = 0, \quad k \neq n, \\ & \frac{\partial \phi_n(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \phi_n(x, 0)}{\partial z} + (\lambda_n + x)\phi_0(x)B_n(z) = -R_0(x)B_n(z), \end{aligned} \right.$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & -g_0(x) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v + x \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial g_k(x, 0)}{\partial z} = a(x)R_0(x), \\ & \frac{\partial g_k(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial g_k(x, 0)}{\partial z} + g_0(x)\kappa_k B_k(z) = R_k(x, z)(a(x) - \lambda_n), \quad k \neq n, \\ & \frac{\partial g_n(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial g_n(x, 0)}{\partial z} + g_0(x)(\lambda_n + x)B_n(z) = \\ & = R_n(x, z)(a(x) - \lambda_n) + xR_0(x)B_n(z). \end{aligned} \right.$$

Для единственности решений дополним системы условиями:

$$\sum_{k=1}^N \phi_k(x) = -\phi_0(x), \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^N g_k(x) = -g_0(x).$$

Тогда решение системы (30) запишется в виде

$$\begin{aligned} \phi_n(x, z) &= \phi_0(x) \int_0^z (\lambda_n(1 - B_n(y) - x)) dy, \\ \phi_k(x, z) &= \phi_0(x) \kappa_k \int_0^z (1 - B_k(y)) dy, \quad k \neq n, \end{aligned}$$

откуда можно заметить, что при $z \rightarrow \infty$

$$(32) \quad \phi_k(x) = R'_k(x).$$

Аналогично из системы (31) можно получить:

$$\begin{aligned} g_k(x, z) &= g_0(x) \kappa_k \int_0^z (1 - B_k(y)) dy + \\ &+ (a(x) - \lambda_n) \int_0^z (R_k(x, y) - R_k(x)) dy, \quad k \neq n, \\ g_n(x, z) &= (\lambda_n + x) g_0(x) \int_0^z (\lambda_n(1 - B_n(y)) dy + \\ &+ (a(x) - \lambda_n) \int_0^z (R_n(x, y) - R_n(x)) dy - x R_0(x) \int_0^z ((1 - B_n(y)) dy, \end{aligned}$$

где

$$(33) \quad g_0(x) = R_0(x) \frac{(\lambda_n - a(x)) \left((\lambda_n + x) b_n^{(2)} + 2x b_n^{(1)} + (\lambda_n - a(x)) \right) \sum_{\substack{k=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_k b_k^{(2)}}{2 \left(1 + (\lambda_n + x) b_n^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_k b_k^{(1)} \right)},$$

и

$$b_k^{(1)} = \int_0^\infty x dB_k(x), \quad b_k^{(2)} = \int_0^\infty x^2 dB_k(x).$$

Последним шагом асимптотического анализа является нахождение функции $\Phi(w, \tau)$. Для этого подставим замены (27) в уравнение (26). После некоторых преобразований запишем полученное уравнение при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) \times \\ &\times \left(a(x) + 2x(R_0(x) - g_0(x)) - 2\lambda_n g_0(x) + \right. \\ &\quad \left. + (2\phi_0(x)(x + \lambda_n) + 2R_0(x)) \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \frac{1}{w\Phi(w, \tau)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что $\Phi(w, \tau)$ определяется уравнением

$$(34) \quad \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} a'(x) + \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) b(x),$$

где

$$(35) \quad b(x) = a(x) + 2x(R_0(x) - g_0(x)) - 2\lambda_n g_0(x).$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (34) и обозначив

$$P(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwy} \Phi(w, \tau) dw,$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} (P(y, \tau) y a'(x)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (P(y, \tau) b(x)),$$

являющееся уравнением Фоккера–Планка для плотности распределения вероятностей $P(y, \tau)$ диффузионного процесса $y(\tau)$, который является решением стохастического дифференциального уравнения:

$$dy(\tau) = y(\tau) a^*(x) d\tau + \sqrt{b(x)} dw(\tau).$$

3.4. Результат асимптотически-диффузионного анализа

Объединяя результаты обеих асимптотик, введем процесс $z(\tau) = x(\tau) + \sqrt{\sigma_n} \times y(\tau)$, являющийся решением стохастического уравнения

$$dz(\tau) = a(z) + \sqrt{\sigma_n b(z)} dw(\tau),$$

где $w(\tau)$ – винеровский процесс.

Плотность распределения вероятностей $P(z, \tau)$ диффузионного процесса $z(\tau)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial P(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z} (P(z, \tau)a(z)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (P(z, \tau)\sigma_n b(z)).$$

Тогда стационарные вероятности процесса $z(\tau)$ вычисляются как

$$P(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left(\frac{\sigma_n}{2} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right).$$

Возвращаясь к цели исследования, обращаем внимание, что в результате применения метода маргинального асимптотически-диффузионного анализа предлагается аппроксимировать распределение вероятностей $i_n(t)$ числа заявок n -го класса на орбите в виде

$$(36) \quad P(i_n) \approx \frac{C}{b(\sigma_n i_n)} \exp \left(\frac{\sigma_n}{2} \int_0^{\sigma_n i_n} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right),$$

где $C = \text{const}$, получаемая из условия нормировки $\sum_{i_n=0}^{\infty} P(i_n) = 1$.

Заметим, что по формуле (36) могут быть вычислены маргинальные распределения для всех классов заявок, однако стоит помнить, что параметры $a(x)$, $b(x)$ в (22) и (35), а также $R_k(x)$, $g_k(x)$, $\phi_k(x)$ в (20), (32)–(33) будут различны для каждого класса.

Таким образом, получены асимптотические маргинальные распределения вероятностей числа заявок для выделенного класса, которые позволяют найти все необходимые характеристики функционирования рассмотренной системы, например, математическое ожидание числа заявок выделенного класса $m_n = \kappa_n - \lambda_n$, вероятность простоя прибора r_0 по формуле (12), моменты любого порядка и квантили нужного порядка и т.д.

4. Заключение

В статье исследована мультиклассовая RQ-система типа $M_n/GI_n/1$. Для ее исследования применен авторский метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа. В результате получено выражение для аппроксимации распределения вероятностей числа выделенного класса заявок на орбите, с помощью которого можно оценить любые характеристики функционирования системы. Стоит отметить, что в исследовании не устанавливаются какие-либо критерии, позволяющие «выделять» класс заявок. Таким образом, полученные в работе формулы могут быть использованы для расчета распределения вероятностей числа заявок каждого класса. В будущих исследованиях асимптотические результаты могут быть применены для моделирования и оптимизации реальных телекоммуникационных сетей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. Berlin: Springer, 2008.
2. *Phung-Duc T.* Retrial Queueing Models: A Survey on Theory and Applications // Stochastic Operations Research in Business and Industry. World Scientific Publisher. 2017. P. 1–26.
3. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. London: Chapman and Hall, 1997.
4. *Dudin A., Lee M., Dudina O., Lee S.* Analysis of Priority Retrial Queue With Many Types of Customers and Servers Reservation as a Model of Cognitive Radio System // IEEE Transact. Communicat. 2017. V. 65(1). P. 186–199.
5. *Gómez-Corral A.G.* A bibliographical guide to the analysis of retrial queues through matrix analytic techniques // Ann. Oper. Res. 2006. V. 141. 163–191.
6. *Artalejo J.R., Pozo M.* Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue // Ann. Oper. Res. 2002. V. 116. P. 41–56.
7. *Neuts M.F., Rao B.M.* Numerical investigation of a multiserver retrial model // Queueing Syst. 1990. V. 7. No. 2. P. 169–189.
8. *Степанов С.Н.* Оптимизация численного расчета характеристик многопоточных моделей с повторными вызовами // Пробл. передачи информ. 1989. Т. 25:2. С. 67–78.
9. *Pakulova E., Ryndin A., Basov O., Struev D.* Principles of Constructing Polymodal Infocommunication Systems for Information Space User Service // IEEE 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT), Moscow, Russia. 2017. P. 1–5.
10. *Naumov V., Gaidamaka Yu., Yarkina N., Samouylov K.* Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems. Springer Nature. Switzerland, 2021.
11. *Nekrasova R.* Stability Analysis of a Multi-class Retrial Queue with General Retrials and Classical Retrial Policy // 2021 28th Conference of Open Innovations Association (FRUCT). Moscow, Russia. 2021. P. 328–333.
12. *Morozov E., Rumyantsev A., Dey S., Deepak T.G.* Performance analysis and stability of multiclass orbit queue with constant retrial rates and balking // Performance Evalut. 2019. V. 134. No. 102005.
13. *Avrachenkov K.* Stability and partial instability of multi-class retrial queues // Queueing Syst. 2022. V.100. No. 3–4. P. 177–179.
14. *Krishnamoorthy A., Joshua V.C., Mathew A.P.* A Retrial Queueing System with Multiple Hierarchical Orbits and Orbital Search // Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2018). Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham. 2018. V. 919. P. 224–233.
15. *Kim B., Kim J.* Proof of the conjecture on the stability of a multi-class retrial queue with constant retrial rates // Queueing Syst. 2023. V. 104. P. 175–185.
16. *Kim B., Kim J.* Stability of a multi-class multi-server retrial queueing system with service times depending on classes and servers // Queueing Syst. 2020. V. 94. P. 129–146.
17. *Shin Y.W., Moon D.H.* M/M/c Retrial Queue with Multiclass of Customers // Method. Comput. Appl. Probab. 2014. V. 16. P. 931–949.
18. *Иверсен В.Б., Степанов С.Н.* Оценка характеристик многопоточных моделей с фиксированным числом повторений // АиТ. 2001. № 5. С. 105–115.

19. *Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S., Lizura O.* Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2019. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham. 2019. V. 11965. P. 207–222.
20. *Danilyuk E., Plekhanov A., Moiseeva S., Sztrik J.* Asymptotic Diffusion Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Servers // Axioms. 2022. V. 11. No. 699.
21. *Nazarov A., Fedorova E., Kostryukov N.* The Method of Marginal Asymptotic-Diffusion Analysis for Multiclass Retrial Queues // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM WRQ 2023. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham. 2024. V. 2163. P. 300–315.

Статъа представлена к публикации членом редколегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 01.08.2024

После доработки 01.12.2024

Принята к публикации 03.12.2024